

Aylana

5.3.2–ta’rif. Koordinatalar tekisligida berilgan $C(a;b)$ nuqtadan berilgan $R>0$ masofada joylashgan nuqtalar to‘plami markazi $C(a;b)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylana deyiladi.

Aylana tekislikda o‘z markazining koordinatalari va radiusi bilan bir qiymatli aniqlanadi. Agar $M(x;y)$ markazi $C(a;b)$ nuqtada radiusi R ga teng bo‘lgan aylananing nuqtasi bo‘lsa (5.3.1_a-rasm), uning koordinatalari

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (5.3.2)$$

tenglamani qanoatlantirishini keltirib chiqarish qiymin emas.

Endi, (5.3.2) da shakl almashtirishlar qilib, uni

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Agar ushbu

$$-2a=2D, \quad -2b=2E, \quad a^2+b^2-R^2=F$$

belgilashlarni kiritsak, u vaqtda, aylananing tenglamasi

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (5.3.3)$$

ko‘rinishga keladi. Bundan aylana ikkinchi tartibli chiziqli ekani kelib chiqadi, chunki oxirgi tenglama (5.3.1) bilan $A=1, B=0, C=1$ bo‘lganda ustma-ust tushadi. Demak, (5.3.1) tenglama aylanani ifoda etish uchun $A=C \neq 0, B=0$ bo‘lishi zarurdir.

Agar aylana markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, u holda $a=b=0$ bo‘lib, (5.3.2) tenglama

$$x^2+y^2=R^2$$

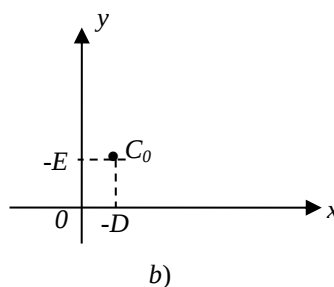
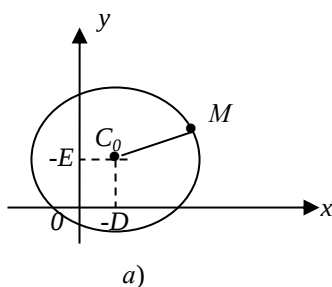
ko‘rinishni oladi.

Endi, (5.3.3) tenglama berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda, elementar shakl almashtirishlar qilib, uni

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, bu yerda uch hol mavjudligi yaqqol ko‘rinib turibdi:

- 1) $D^2+E^2-F>0$ bo‘lsa, $R^2=D^2+E^2-F$ belgilash bilan markazi $(-D;-E)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylanaga ega bo‘lamiz;
- 2) $D^2+E^2-F=0$ bo‘lganda, oxirgi tenglamani tekislikning faqat bitta $(-D;-E)$ nuqtasi qanoatlantiradi, ya’ni bitta nuqtaga ega bo‘lamiz (5.3.1_b-rasm);
- 3) $D^2+E^2-F<0$ bo‘lsa, oxirgi tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikning birorta ham nuqtasi mavjud bo‘lmaydi. Bu holda mavhum aylanaga egamiz deyiladi.

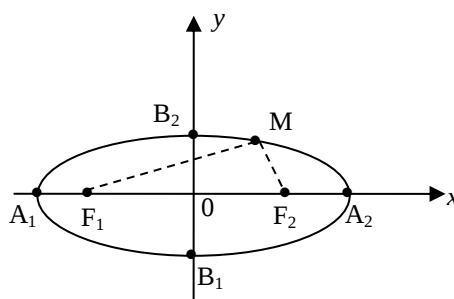


5.3.1- rasm.

5.3.2. Ellips

5.3.3-ta'rif. Ellips deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalar yig'indisi berilgan o'zgarmas songa teng bo'lib, bu berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi talab qilinadi.

Ellips fokuslarini F_1 va F_2 bilan belgilaymiz. Ellipsning sodda tenglamasini olish maqsadida Dekart koordinatalar sistemasini Ox o'q fokuslardan o'tadigan, Oy o'q esa $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo'ladigan qilib kiritamiz (5.3.2-rasm). Fokuslar orasidagi masofani $2c$ orqali belgilaymiz. U holda, F_1 va F_2 nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ bo'ladi. Ta'rifda aytilgan berilgan o'zgarmas sonni $2a$ bilan belgilaymiz.



5.3.2- rasm.

$M(x;y)$ –ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, undan fokuslarigacha bo'lgan $r_1 = d(F_1; M)$, $r_2 = d(F_2; M)$ masofalarni fokal radiuslari deb atalib, ta'rifga ko'ra:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Bunga

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni qo'yib,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu ellipsning yuqoridagidek qilib kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir. Bu tenglamani soddalashtirish uchun quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \Rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \end{aligned}$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

F_1MF_2 uchburchakda $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$, ya'ni $2a > 2c > 0$ yoki $a^2 - c^2 > 0$. Shuning uchun,

$$a^2 - c^2 = b^2$$

deb belgilab, oxirgi tenglamani

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ko'rinishda yozish mumkin yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.3.4)$$

(5.3.4) *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Ellips haqidagi ba'zi bir mulohazalarni keltiramiz.

1) Agar ellipsning fokuslari deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushib qolsa, u holda $c=0$, $a^2=b^2$ bo'lib, (5.3.4) tenglama

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ko'rinishga keladi. Bu bizga tanish markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasidir. Demak, aylana ellipsning xususiy holidir.

2) (5.3.4) ellips Ox o'q bilan ikkita $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ nuqtalarda, Oy o'q bilan ham ikkita $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ nuqtalarda kesishadi (5.3.2-rasm). A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar *ellipsning uchlari* deb ataladi.

$|A_1A_2| = 2a$; $|B_1B_2| = 2b$, $a > b$ ekanligi ravshandir. Shu sababli $|A_1A_2|$ kesmani *ellipsning katta o'qi*, $|B_1B_2|$ kesmani esa *kichik o'qi* deyiladi. Demak, a va b sonlar *ellipsning yarim o'qlaridir*.

3) Fokuslari orasidagi masofaning katta o'qi uzunligiga nisbati *ellipsning eksentrisiteti* deb ataladi va ε harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

bundan $0 \leq c < a$ ga asosan ellips eksentrisiteti uchun

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Eksentrisitet ellipsning cho'ziqlik darajasini tavsiflaydi. U qanchalik birga yaqin bo'lsa, ellips shunchalik cho'ziq bo'ladi. $\varepsilon=0$ bo'lganda fokuslar ustma-ust tushadi va yarim o'qlar teng bo'lib, ellips aylanaga o'tadi.

4) Ellipsning kanonik tenglamasidan uning nuqtalari Ox o'qqa nisbatan ham Oy o'qqa nisbatan ham simmetrik joylashganligi, shuningdek, koordinatalar boshiga nisbatan ham markaziy simmetriklik hossasiga ega ekanligi yaqqol ko'rinib turibdi. Demak, ellips ikkita simmetriya o'qlariga (ular katta va kichik o'qlaridan iborat) va bitta simmetriya markaziga ega ekan. Ellipsning simmetriya markazini uning *markazi* deb ataladi. Demak, *ellips markazli chiziqlar turkumiga tegishlidir*.

5) (5.3.4) ellipsning kanonik tenglamasidan uning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi uchun $|x| \leq a \wedge |y| \leq b$, ya'ni ellips tomonlari $2a$ va $2b$ hamda koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichiga joylashgan ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek, (5.3.4) ellipsning koordinatalar tekisligining birinchi choragiga tegishli qismi uchun

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$$

ni yoza olamiz. Bundan $x=0 \Rightarrow y=b$ bo'lib, x o'zgaruvchining qiymati 0 dan a gacha o'sib borganda y o'zgaruvchining qiymati b dan 0 gacha kamayib borishini ko'rish mumkin. Demak, (5.3.4) ellipsning birinchi chorakdagi yoyining nuqtasi $B_2(0;b)$ nuqtadan $A_2(a;0)$ nuqtaga qarab pastlab boradi (5.3.2-rasm). (5.3.4) ellipsning qolgan choraklaridagi qismlari uchun uning simmetriklik xossasi asosida xulosa chiqarish osondir.

6) Ellipsning fokal radiuslari uchun $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.